

MATHEMATISCHDIDAKTISCHE
ANMERKUNGEN ZU NULL HOCH NULL
F.Schweiger, Salzburg

Dem Schüler ist stets die Beweisbedürftigkeit mathematischer Aussagen klarzumachen, sein kritisches Verständnis für mathematische Beweise ist zu schulen; die klare Unterscheidung der Begriffe Axiom, Satz, Definition ist zu fordern.

Aus dem Bundesgesetzblatt für die
Republik Österreich Jahrgang 1978
vom 28.2.1978, 31. Stück; 114. Verordnung

1. Die besondere Stellung der Zahl 0 hat in letzter Zeit zu einigen Veröffentlichungen geführt. Die Aufsätze von Lisa Hefendehl - Hebeker und Ingmar Lehmann und Wolfgang Schulz sind im Literaturverzeichnis genannt. Ursprünglich war 0 eine "Ziffer", das heißt zur Markierung einer Leerstelle in der dezimalen Positionsschreibweise ("arabisches Ziffernsystem" genannt) gebraucht. Das deutsche Wort "Ziffer" ist ja wie das lateinische (oder besser: "neulateinische") Wort "cifra" aus arabisch "sifr" abgeleitet; und "sifr" bezeichnet noch im heutigen Arabisch die Null. Erst allmählich ist aus der Null eine "ordentliche" Zahl geworden! Bemerkenswert ist, daß schon Ptolemaios (ca. 150 n. Chr.) in seinen Tabellen ein Zeichen o als Lückenzeichen verwendet hat, was vielleicht eine Abkürzung von griechisch οὐδέν (=nichts) bedeutet hat. Es sei hier etwa auf das Buch von H. Gericke verwiesen.

Kann man 0^0 definieren? Natürlich, $0^0 := 47$ ist eine solche Definition und es ist nicht einzusehen, was an dieser Definition schlecht sein sollte.

Allerdings ist $0^0 := \pi$ wohl genau so gut oder genau so schlecht, denn es

ist nicht erkennbar, wozu eine solche Definition brauchbar wäre bzw. in welchem Kontext sie sinnvoll wäre.

2. Kehren wir einen Moment zur Definition von a^n , $n \in \mathbf{N}$, zurück! Ist $a \in \mathbf{R}$, so setzt man bekanntlich

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n\text{-mal}}. \quad (2.1)$$

Wenn jemanden die leicht unbestimmte Schreibweise "n-mal" bzw. die bloß andeutenden Punkte zwischen den ersten und letzten Gliedern stören, so kann er diese Definition durch die rekursive Definition

$$\begin{aligned} a^1 &:= a \\ a^{n+1} &:= a \cdot a^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

ersetzen. Dank des Assoziativgesetzes braucht man in (2.1) keine Klammern zu setzen bzw. ist (2.1) mit (2.2) äquivalent. Für jedes feste $a \in \mathbf{R}$ erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} E_a &: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R} \\ n &\mapsto E_a(n) = a^n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Diese Abbildung hat die grundlegende Eigenschaft:

$$E_a(n+m) = E_a(n) \cdot E_a(m) \quad (2.4)$$

Speziell für $a = 0$ erhalten wir $E_0(\mathbf{N}) = 0^n = 0$.

Wir wissen, daß die geordnete Halbgruppe, $(\mathbf{N}, +)$ zur geordneten Gruppe $(\mathbf{Z}, +)$ erweiterbar ist.

Das bedeutet in moderner Sprechweise ausgedrückt:

Es existiert eine injektive Abbildung (die wir mit \hookrightarrow bezeichnen)

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{N} &\hookrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \nu(n) \end{aligned} \tag{2.5}$$

mit den Eigenschaften

$$\nu(n+m) = \nu(n) + \nu(m) \tag{2.6}$$

$$n < m \Rightarrow \nu(n) < \nu(m) \tag{2.7}$$

Kürzer und nicht so ganz präzise: Da man $+1, +2, +3, \dots$ durch $1, 2, 3, \dots$ ersetzen kann, kann man \mathbb{Z}^+ durch \mathbb{N} ersetzen.

Zur Verwendung des Symbols \hookrightarrow für injektive Abbildungen sei angemerkt, daß dieses Symbol als Kreuzung zwischen den Symbolen \subset (Teilmengenbeziehung) und \rightarrow (Funktionspfeil) anzusehen ist. Es bewährt sich dort, wo injektive Abbildungen zu nachträglichen Identifizierungen führen, wie etwa bei Zahlbereichserweiterungen:

$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$: Die positiven ganzen Zahlen übernehmen die Rolle der natürlichen Zahlen.

$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$: Die Brüche mit Nenner 1 können als ganze Zahlen angesehen werden.

$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$: Im Modell der Intervallschachtelungen etwa sind die rationalen Zahlen als "rationalwertige" Intervallschachtelungen vertreten.

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$: Die Paare $(a, 0)$ signalisieren die Einbettung der reellen Zahlen als komplexe Zahlen mit Imaginärteil 0.

4. Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & E_a & \\ & \nearrow & \\ \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow \cap & \nearrow & \\ \mathbb{Z} & & \end{array} \tag{3.1}$$

Das Lehrplankapitel "Potenzen mit ganzzahligen Exponenten" läßt sich mathematisch

auf die Frage reduzieren:

Können wir eine Abbildung $F_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ finden, die E_a erweitert? D.h. die Einschränkung von F_a auf \mathbb{N} ist E_a (oder mittels der Abbildung ν ausgedrückt: $F_a(\nu(n)) = E_a(n)$). Die gesuchte Abbildung ist im Diagramm (3.1) durch einen strichlierten Pfeil angedeutet.

Selbstverständlich können wir sofort beliebig viele Abbildungen dieser Art angeben:

$$F_a(z) = \begin{cases} a^z & \text{für } z > 0 \\ 21 & \text{für } z = 0 \\ -1 & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

liefert ein Beispiel.

Aber dies ist zu billig. Mathematik ist anspruchsvoll. Wir wollen mehr! Wir wollen, daß eine zu (2.4) analoge Eigenschaft für F_a gilt, nämlich für alle $z, w \in \mathbb{Z}$ sei die Beziehung.

$$F_a(z+w) = F_a(z) F_a(w) \tag{3.2}$$

erfüllt. Diese Forderung soll ja das Rechnen mit ganzzahligen Exponenten in gewohnter Weise ermöglichen.

Dann gilt:

Satz 1: Es gibt genau eine Erweiterung $F_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ des Diagrammes (3.1), sodaß (3.2) gilt.

Beweis: (α) Es sei $a \neq 0$. Aus

$$\begin{aligned} F_a(n+0) &= F_a(n) F_a(0) = a^n F_a(0) \\ \parallel \\ F_a(n) &= a^n \end{aligned}$$

folgt $F_a(0) = 1$. Weiters ist sodann

$$1 = F_a(0) = F_a(n-n) = F_a(n) F_a(-n) = a^n F_a(-n)$$

Daher ist

$$F_a(-n) = \frac{1}{a^n}$$

somit gilt

$$F_a(n) = E_a(n) = a^n$$

$$F_a(0) = 1$$

$$F_a(-n) = \frac{1}{a^n} =: a^{-n}$$

Daher ist F_a eindeutig bestimmt.

Es sei deutlich hervorgehoben, daß $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ eine Definition für a^{-n} darstellt, die nur für $a \neq 0$ sinnvoll ist.

(β) Es sei $a = 0$. Aus

$$\begin{aligned} F_0(n+0) &= F_0(n) F_0(0) = E_0(n) F_0(0) = 0 \cdot F_0(0) \\ &\parallel \\ F_0(n) &= 0 \end{aligned}$$

können wir nichts schließen! Aber es ist weiters

$$F_0(0) = F_0(n-n) = F_0(n) F_0(-n) = 0 \cdot F_0(-n) = 0$$

Damit ist gezeigt: Soll F_0 die Eigenschaft (3.2) erfüllen, so ist notwendig

$$F_0(0) = 0. \tag{3.3}$$

Da

$$\begin{aligned} F_0(-n+0) &= F_0(-n) F_0(0) = F_0(-n) 0 = 0 \\ &\parallel \\ F_0(-n) & \end{aligned}$$

folgt

$$F_0(-n) = 0. \tag{3.4}$$

Folgerung: Schreibt man statt, $F_a(z)$ wie üblich a^z , so erhält man aus (3.3)

nun $0^0 = 0$. Aus (3.4) erhält man $0^{-n} = 0$, speziell $0^{-1} = 0$.

Die Definition $0^{-1} := 0$ bzw. $0^{-n} = 0$ mag für den ersten Blick sehr ungewöhnlich aussehen, erfüllt aber die Forderung (3.2).

4. Um unseren Ausflug in die Gruppentheorie ein wenig zu vertiefen, zeigen wir

Satz 2: (α) Ist $a \neq 0$, so bildet F_a die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ auf eine Untergruppe der (multiplikativen) Gruppe (\mathbb{R}^*, \cdot) , $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ab. Diese Abbildung ist injektiv für $a \neq 1$ und $a \neq -1$.

(β) Ist $a = 0$, so ist das Bild von \mathbb{Z} unter F_a die Gruppe $(\{0\}, \cdot)$.

Unter dem Bild von \mathbb{Z} unter F_a verstehen wir die Menge

$$F_a \mathbb{Z} := \{F_a(z) : z \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis: (α) Ist $a \neq 0$, so ist $F_a(z) \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da $1 = F_a(0)$ und $F_a(-z) = \frac{1}{F_a(z)}$ gilt, ist das Bild $F_a \mathbb{Z}$ eine Untergruppe von (\mathbb{R}^*, \cdot) . Ist $a = 1$, so ist $F_a \mathbb{Z} = \{1\}$. Ist $a = -1$, so ist $F_a \mathbb{Z} = \{1, -1\}$. Sei $F_a(z) = F_a(w)$. Dann ist $F_a(z-w) = 1$. Ist aber $a \neq 1$ oder $a \neq -1$, so kann $F_a(z-w) = 1$ nur für $z-w = 0$ eintreten.

(β) Diese Behauptung ist unmittelbar klar! Was es zu beachten gilt, ist, daß die Menge $\{0\}$ zusammen mit der Multiplikation eine Gruppe bildet, aber keine Untergruppe von (\mathbb{R}^*, \cdot) , da $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Nach (3.4) kann man $0^{-n} = 0$ setzen, aber dann ist $0^n \cdot 0^{-n} = 0$ und daher $0^n 0^{-n} \neq 1$.

Daher ist es unzweckmäßig in dieser Definition von 0^{-1} einen Ersatz für $\frac{1}{0}$ zu sehen.

5. Ist die Sache damit erledigt? Eher nein! Wir betrachten die Funktion

$$p_0 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^0 = 1$$

Diese Funktion ist auf \mathbb{R}^* stetig (da konstant). Es ist naheliegend, diese Funktion auf \mathbb{R} stetig fortzusetzen. Die eindeutig bestimmte stetige Funktion

ist durch $p_0(0) := 1$ bestimmt. Schreibt man konsequent $p_0(x) = x^0$, so erhält man $0^0 = 1$.

6. Dieser Abschnitt ist etwas schwieriger und der eilige Leser kann ihn getrost überschlagen und zu 7. übergehen.

Betrachtet man die Funktion

$$\begin{aligned} p_{-1} : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

so erscheint die durch Satz 1 nahegelegte Definition $0^{-1} = F_{-1}(0) = 0$ sehr anfechtbar. Aber es ist, wie man leicht sieht, überhaupt nicht möglich, die Funktion p_{-1} im Punkt $x = 0$ stetig zu ergänzen, denn $\lim_{x \rightarrow 0} p_{-1}(x)$ existiert (in \mathbb{R}) nicht.

In diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, wie man diesem "Übelstand" durch Erweiterung von \mathbb{R} zu einer Menge $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abhelfen könnte.

Sei $S^1 = \{(u|v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ der Einheitskreis.

Wir betrachten nun folgende Abbildung σ von $S^1 \setminus \{(0|1)\}$ in \mathbb{R} :

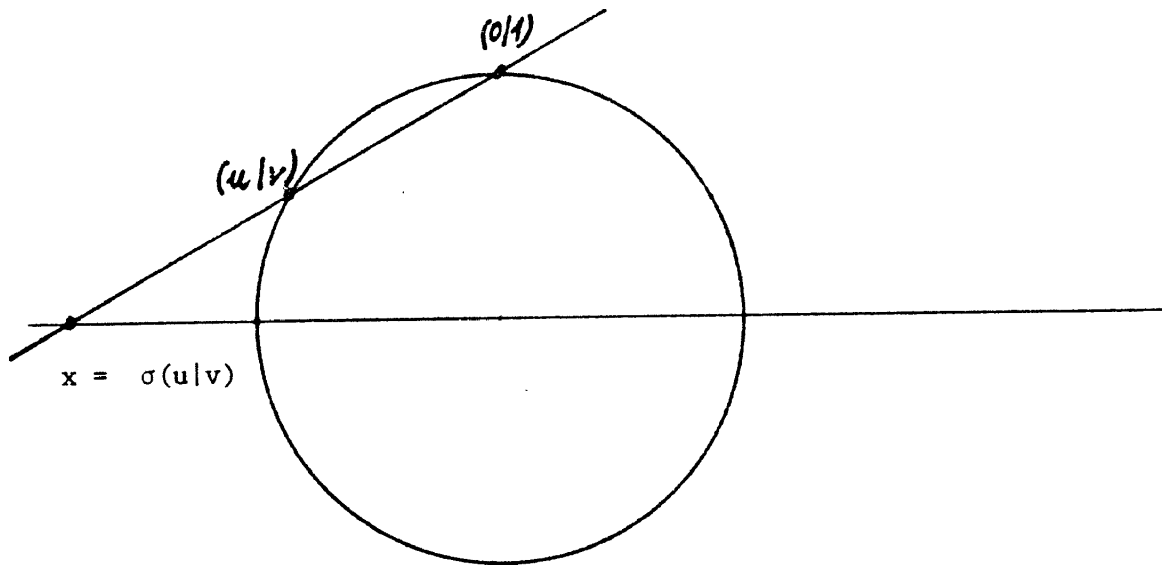
$$\begin{aligned} \sigma : S^1 \setminus \{(0|1)\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u|v) &\mapsto \frac{u}{1-v} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Diese Abbildung ist bijektiv. Die Umkehrabbildung σ^{-1} lautet:

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \setminus \{(0|1)\} \\ x &\mapsto \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1} \right) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Die Abbildung σ läßt sich geometrisch leicht interpretieren: Man verbinde $(0|1)$ und $(u|v)$ durch eine Gerade. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der reellen Achse ist $\sigma(u|v)$. Übrigens liefert σ^{-1} eine bequeme Art, pythagoräische

Tripel zu erzeugen: Ist x rational und ist $\sigma^{-1}(x) = (\frac{A}{C} | \frac{B}{C})$, so gilt $A^2 + B^2 = C^2$.



Eine entsprechende Verallgemeinerung dieser Abbildung σ zu einer Abbildung der Einheitskugel auf die Ebene ist als stereographische Projektion bekannt. Wird σ^{-1} auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eingeschränkt, so wird auf S^1 der Punkt $(0 | -1)$ ausgelassen. Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 \setminus \{(0|1), (0|-1)\} & \xrightarrow{f} & S^1 \setminus \{(0|1), (0|-1)\} \\
 \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\
 \mathbb{R}^* & \xrightarrow{p_{-1}} & \mathbb{R}^*
 \end{array} \quad (6.4)$$

so kann man sich fragen, ob es eine Abbildung f gibt, die dieses Diagramm zu einem kommutativen Diagramm ergänzt, sodaß also $\sigma(f(u|v)) = p_{-1}(\sigma(u|v))$ gilt!

Das bedeutet

$$f(u|v) = \sigma^{-1} \left(\frac{1}{\sigma(u|v)} \right) = \sigma^{-1} \left(\frac{1-v}{u} \right) = (u | -v).$$

Dabei hat man in der Rechnung $u^2 + v^2 = 1$ zu beachten. Damit ist $f(u|v) = (u | -v)$ berechnet und stellt geometrisch die Spiegelung an der u -Achse dar! Setzt man daher

$$\begin{aligned} f(0|1) &= (0|-1) \\ f(0|-1) &= (0|1), \end{aligned} \tag{6.5.}$$

so ist f eine auf ganz S^1 definierte und stetige Funktion. Dabei kann auf eine exakte Definition der Stetigkeit von Funktionen $f: S^1 \rightarrow S^1$ verzichtet werden, da in diesem Fall eine anschauliche Vorstellung von Stetigkeit genügt. Bezüglich einer Diskussion der Stetigkeit in etwas allgemeinerem, aber doch anschaulichem Rahmen sei auf den Aufsatz von H.Bürger - H.D.Rinkens - F.Schweiger verwiesen.

Dem entspricht, daß man \mathbb{R} zu einer Menge $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ erweitern kann und sodann $\sigma(0|1) := \infty$ setzt. Dann erhält man aus (6.4) und (6.5) ein neues kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{R} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{p_{-1}} & \mathbb{R} \cup \{\infty\} \end{array}$$

wenn man $p_{-1}(\infty) := 0$ und $p_{-1}(0) := \infty$ (also $0^{-1} = \infty$) setzt. Die so erweiterte Funktion $p_{-1}: \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist (in leicht zu präzisierendem Sinn) stetig.

Durch Erweiterung von \mathbb{R} zur Menge $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (und nicht wie in anderem Zusammenhang üblich, zu $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) kann p_{-1} in den Punkt $x = 0$ stetig fortgesetzt werden.

7. Existiert $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$? Setzt man nun schon voraus, daß man $x^x = e^{x \ln x}$ für alle $x > 0$ zur Verfügung hat, so wollen wir zunächst $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$ berechnen (ohne Verwendung der Regel von de l'Hospital). Es ist $\phi(x) = x \ln x$ für alle $x > 0$ definiert und $\phi'(x) = \ln x + 1$. Daher ist für $x < \frac{1}{e}$ die Funktion ϕ streng monoton abnehmend. Daher genügt es $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$ zu berechnen, indem man x eine passende monoton abnehmende Folge $\langle a_n \rangle$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ durchlaufen läßt. Wählt man

$a_n = 2^{-n}$ etwa, so erhält man

$$2^{-n} \ln 2^{-n} = -n 2^{-n} \ln 2.$$

Wir behaupten

$$2^n \geq n^2$$

für alle $n \geq 4$. Für $n = 4$ ist dies richtig. Ein Induktionsbeweis führt auf

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2.$$

Wir müssen daher zeigen

$$2n^2 \geq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

also

$$n^2 \geq 2n + 1.$$

Da die größte Nullstelle von $g(x) = x^2 - 2x - 1$ durch $x = 1 + \sqrt{2}$ gegeben ist, ist $n^2 - 2n - 1 > 0$ für $n \geq 4$ richtig.

Daher ist

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \ln 2^{-n} = 0.$$

Da $x \rightarrow e^x$ für $x = 0$ stetig ist, erhält man

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

Abschließend seien drei didaktische Thesen formuliert, die, so ich hoffe, durch das Vorgegangene erläutert wurden:

- (1) Zum Mathematikunterricht gehört das Sprechen über Mathematik. Damit können Exkursionen in die Geschichte der Mathematik oder zu den Anwendungen der Mathe-

matik gemeint sein. Dazu gehört aber auch der Versuch zu erklären (oder besser noch: die Schüler entdecken zu lassen), warum und wieso man diese oder jene mathematische Begriffsbildung wählt und für nützlich hält.

- (2) Für den Erwerb einer angemessenen Vorstellung dessen, was Mathematik, Mathematisieren oder mathematisches Denken sein könnte, ist nicht so sehr der Inhalt (der "Stoff") entscheidend, als wie die Art des Unterrichtens.
- (3) Mathematik kann von (oft zunächst unbedeutend aussehenden) Problemen ausgehend weiterentwickelt werden. So führt 0^0 in die Gruppentheorie, in die Analysis und in die Topologie (der kompakte Raum S^1 ist zu $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ homöomorph).

L i t e r a t u r

- H.Bürger, H.D.Rinkens und F.Schweiger: Zur Behandlung der Stetigkeit: Diskussion eines breiteren Zugangs. DdM, Heft 4, 1980, 225 - 280
- H.Gericke: Geschichte des Zahlbegriffs, B. I. Hochschultaschenbücher, B. I. Mannheim/Wien/Zürich 1970
- L.Hefendehl - Hebeker: Die Zahl Null im Bewußtsein von Schülern. Eine Fallstudie. Journal f. Mathematikdidaktik Heft 1/1982, 45 - 63
- L.Hefendehl - Hebeker: Als die Null in das Zahlenreich kam. Mathematiklehrer 1 - 1982, 2 - 4
- L.Hefendehl - Hebeker:
Praxis der Mathematik 24 (1982), Heft 4,
- I.Lehmann und W.Schulz: Kapriolen der Null - 0 durch 0. Mathematik in der Schule. 19. Jg. (1981), 266 - 268
- I.Lehmann und W.Schulz: Kapriolen der Null - 0 teilt 0. Ibid. 19. Jg. (1981), 430 - 432
- I.Lehmann und W.Schulz: Kapriolen der Null - 0 hoch 0. Ibid. 19. Jg. (1981), 509 - 512
- I.Lehmann und W.Schulz: Kapriolen der Null - k.g.V.(0,0) und g.g.T.(0,0). Ibid. 20. Jg. (1982), 29 - 32

Prof.F.Schweiger
Institut für Didaktik
der Naturwissenschaften
Abteilung für Didaktik
der Mathematik
Universität Salzburg
Petersbrunnstraße 19
A-5020 Salzburg